Exercise 21(C)

1. Show that:
(i) tan 10º tan 15º tan 75º tan 80º = 1
Solution:

Taking, tan 10º tan 15º tan 75º tan 80º
= tan (90º - 80º) tan (90º - 75º) tan 75º tan 80º
= cot 80º cot 75º tan 75º tan 80º
= 1 [Since, tan θ x cot θ = 1]

(ii) sin 42º sec 48º + cos 42º cosec 48º = 2
Solution:

Taking, sin 42º sec 48º + cos 42º cosec 48º
= sin 42º sec (90º – 42º) + cos 42º cosec (90º – 42º)
= sin 42º cosec 42º + cos 42º sec 42º
= 1 + 1 [Since, sin θ x cosec θ = 1 and cos θ x sec θ = 1]
= 2

(iii) sin 26º/ sec 64º + cos 26º/ cosec 64º = 1
Solution:

Taking,

$$\frac{\sin 26^\circ}{\sec 64^\circ} + \frac{\cos 26^\circ}{\operatorname{cosec} 64^\circ}$$

$$= \frac{\sin 26^\circ}{\sec(90^\circ - 26^\circ)} + \frac{\cos 26^\circ}{\operatorname{cosec}(90^\circ - 26^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 26^\circ}{\operatorname{cosec} 26^\circ} + \frac{\cos 26^\circ}{\sec 26^\circ}$$

$$= \sin^2 26^\circ + \cos^2 26^\circ$$

$$= 1$$

2. Express each of the following in terms of angles between 0°and 45°:
(i) sin 59°+ tan 63°
(ii) cosec 68°+ cot 72°
(iii) cos 74°+ sec 67°
Solution:

(i) sin 59°+ tan 63°
= sin (90 - 31)°+ tan (90 - 27)°
= cos 31°+ cot 27°

(ii) cosec 68°+ cot 72°

= cosec (90 - 22)°+ cot (90 - 18)°
= sec 22°+ tan 18°

(iii) cos 74°+ sec 67°
= cos (90 - 16)°+ sec (90 - 23)°
= sin 16°+ cosec 23°

3. Show that:

(i) $\frac{\sin A}{\sin(90^\circ - A)} + \frac{\cos A}{\cos(90^\circ - A)} = \sec A \operatorname{cosec} A$

(ii) $\sin A \cos A - \frac{\sin A \cos(90^\circ - A)\cos A}{\sec(90^\circ - A)} - \frac{\cos A \sin(90^\circ - A)\sin A}{\operatorname{cosec}(90^\circ - A)} = 0$

Solution:

(i) $\frac{\sin A}{\sin(90^\circ - A)} + \frac{\cos A}{\cos(90^\circ - A)}$

$= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A}$

$= \frac{1}{\cos A \sin A}$

$= \sec A \operatorname{cosec} A$

(ii) $\sin A \cos A - \frac{\sin A \cos(90^\circ - A)\cos A}{\sec(90^\circ - A)} - \frac{\cos A \sin(90^\circ - A)\sin A}{\operatorname{cosec}(90^\circ - A)}$

$= \sin A \cos A - \frac{\sin A \sin A \cos A}{\operatorname{cosec} A} - \frac{\cos A \cos A \sin A}{\sec A}$

= sin A cos A – $\sin^3$ A cos A – $\cos^3$ A sin A
= sin A cos A – sin A cos A ($\sin^2$ A + $\cos^2$ A)
= sin A cos A – sin A cos A (1) [Since, $\sin^2$ A + $\cos^2$ A = 1]
= 0

4. For triangle ABC, show that:
(i) sin (A + B)/ 2 = cos C/2
(ii) tan (B + C)/ 2 = cot A/2
Solution:

We know that, in triangle ABC
∠A + ∠B + ∠C = 180° [Angle sum property of a triangle]

(i) Now,
(∠A + ∠B)/ 2 = 90° - ∠C/ 2
So,
sin ((A + B)/ 2) = sin (90° - C/ 2)
= cos C/ 2

(ii) And,
(∠C + ∠B)/ 2 = 90º - ∠A/ 2
So,
tan ((B + C)/ 2) = tan (90º - A/ 2)
= cot A/ 2

5. Evaluate:

(i) $3\frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} - \frac{\sec 32^\circ}{\operatorname{cosec} 58^\circ}$

(ii) $3\cos 80^\circ \operatorname{cosec} 10^\circ + 2\cos 59^\circ \operatorname{cosec} 31^\circ$

(iii) $\frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ} + \sin 59^\circ \sec 31^\circ$

(iv) $\tan(55^\circ - A) - \cot(35^\circ + A)$

(v) $\operatorname{cosec}(65^\circ + A) - \sec(25^\circ - A)$

(vi) $2\frac{\tan 57^\circ}{\cot 33^\circ} - \frac{\cot 70^\circ}{\tan 20^\circ} - \sqrt{2}\cos 45^\circ$

(vii) $\frac{\cot^2 41^\circ}{\tan^2 49^\circ} - 2\frac{\sin^2 75^\circ}{\cos^2 15^\circ}$

(viii) $\frac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} + \frac{\cos 59^\circ}{\sin 31^\circ} - 8\sin^2 30^\circ$

(ix) $14\sin 30^\circ + 6\cos 60^\circ - 5\tan 45^\circ$

Solution:

(i)
$$3\frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} - \frac{\sec 32^\circ}{\operatorname{cosec} 58^\circ}$$
$$= 3\frac{\sin(90^\circ - 18^\circ)}{\cos 18^\circ} - \frac{\sec(90^\circ - 58^\circ)}{\operatorname{cosec} 58^\circ}$$
$$= 3\frac{\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} - \frac{\operatorname{cosec} 58^\circ}{\operatorname{cosec} 58^\circ} = 3 - 1 = 2$$

(ii) 3 cos 80º cosec 10º + 2 cos 59º cosec 31º
= 3 cos (90 - 10)º cosec 10º + 2 cos (90 - 31)º cosec 31º
= 3 sin 10º cosec 10º + 2 sin 31º cosec 31º
= 3 + 2 = 5

(iii) sin 80º/ cos 10º + sin 59º sec 31º
= sin (90 - 10)º/ cos 10º + sin (90 - 31)º sec 31º
= cos 10º/ cos 10º + cos 31º sec 31º
= 1 + 1 = 2

(iv) tan (55º - A) – cot (35º + A)
= tan [90º – (35º + A)] – cot (35º + A)

= cot (35° + A)] – cot (35° + A)
= 0

(v) cosec (65° + A) – sec (25° – A)
= cosec [90° – (25° – A)] – sec (25° – A)
= sec (25° – A) – sec (25° – A)
= 0

(vi)
$$2\frac{\tan 57^\circ}{\cot 33^\circ} - \frac{\cot 70^\circ}{\tan 20^\circ} - \sqrt{2}\cos 45^\circ$$
$$= 2\frac{\tan(90^\circ - 33^\circ)}{\cot 33^\circ} - \frac{\cot(90^\circ - 20^\circ)}{\tan 20^\circ} - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 2\frac{\cot 33^\circ}{\cot 33^\circ} - \frac{\tan 20^\circ}{\tan 20^\circ} - 1$$
$$= 2 - 1 - 1$$
$$= 0$$

(vii)
$$\frac{\cot^2 41^\circ}{\tan^2 49^\circ} - 2\frac{\sin^2 75^\circ}{\cos^2 15^\circ}$$
$$= \frac{[\cot(90^\circ - 49^\circ)]^2}{\tan^2 49^\circ} - 2\frac{[\sin(90^\circ - 15^\circ)]^2}{\cos^2 15^\circ}$$
$$= \frac{\tan^2 49^\circ}{\tan^2 49^\circ} - 2\frac{\cos^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}$$
= 1 – 2 = -1

(viii)
$$\frac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} + \frac{\cos 59^\circ}{\sin 31^\circ} - 8\sin^2 30^\circ$$
$$= \frac{\cos(90^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} + \frac{\cos(90^\circ - 31^\circ)}{\sin 31^\circ} - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} + \frac{\sin 31^\circ}{\sin 31^\circ} - 2$$
$$= 1 + 1 - 2 = 0$$

(ix) 14 sin 30° + 6 cos 60° – 5 tan 45°
= 14 (1/2) + 6 (1/2) – 5(1)
= 7 + 3 – 5
= 5

6. A triangle ABC is right angled at B; find the value of (sec A. cosec C – tan A. cot C)/ sin B
Solution:

As, ABC is a right angled triangle right angled at B
So, A + C = 90°

(sec A. cosec C – tan A. cot C)/ sin B
= (sec (90º - C). cosec C – tan (90º - C). cot C)/ sin 90º
= (cosec C. cosec C – cot C. cot C)/ 1 = cosec^2 C – $\cot^2$ C
= 1 [Since, cosec^2 C – $\cot^2$ C = 1]